

Сценарий инициации молнии

Д.И. Иудин^{1,2}, В.А. Раков³, А.А. Сысоев^{1,2}

¹Институт прикладной физики Российской академии наук, Нижний Новгород, Россия

²Приволжский исследовательский медицинский университет, Нижний Новгород, Россия

³Университет Флориды, Гейнсвилл, США

Введение

Несмотря на более чем 250-ти летнюю историю изучения, грозное электричество по-прежнему остается одним из самых интригующих объектов физических исследований. Корнем интриги является тот факт, что наблюдаемые в грозных облаках электрические поля имеют пиковые значения (см. Таблицу 3.2 в книге [19] и ссылки в ней) $(1 - 2) \cdot 10^5$ В/м (максимальное измеренное значение составляет $4 \cdot 10^5$ В/м), что на порядок меньше, чем уровень пробоя воздуха на этих высотах, составляющий величину порядка 10^6 В/м [19]. Кроме того, до сих пор не понятно какие физические механизмы обеспечивают распространение различных типов молниевых разрядов и макромасштабные проявления асимметрии молнии. Существует несколько факторов, актуализирующих поиск физических механизмов инициации и развития молнии. Это, прежде всего, глобальные изменения климата, сопровождающиеся усилением грозовой активности на планете, а также уязвимость элементов слаботочной электроники навигационных систем и систем жизнеобеспечения для мощного электромагнитного воздействия молниевых ударов. Новейшие достижения физики атмосферы и гидросферы, геофизической электродинамики, геоэкологии и климатологии подтверждают важную роль грозовой активности в диагностике глобальных изменений климата на планете. Достаточно упомянуть проблему аэрозольного загрязнения воздуха на планете, поскольку аэрозоли способствуют росту уровня грозовой активности. Ожидается, что к концу 21 века молниевая активность возрастет примерно на 50%. Поэтому не случайно проблемы инициации и развития молнии открывают список десяти наиболее важных, по мнению ведущих специалистов, нерешенных проблем атмосферного электричества [5].

Физика инициации и развития молнии стала сценой, на которой развернулась настоящая драма идей. Для объяснения процесса возникновения молниевых разрядов было предложено несколько различных концепций, среди которых широкую известность приобрели два подхода: генерация молнии через инициацию положительного стримера с поверхности гидрометеора и возникновение молнии в результате развития пробоя на

убегающих электронах. Вторая гипотеза до недавнего времени активно развивалась и считалась ведущей. Однако на заре 21 века благодаря развитию экспериментальной базы атмосферной физики стало понятно, что скорее сама молния генерирует убегающие электроны, а вовсе не наоборот [5]. В качестве выхода из кризиса была предложена позитронная модернизация механизма пробоя на убегающих электронах, в которой развитие разряда поддерживается петлей положительной обратной связи. Но и данный подход становится работоспособным только при наличии в грозовом облаке нереалистично большой разности потенциалов порядка 450 МВ. Параллельно с развитием позитронного сценария для объяснения локальной интенсификации поля предлагаются и гибридные механизмы, соединяющие пробой на убегающих электронах с более ранней идеей инициации положительной стримерной системы с поверхности гидрометеоров [16]. В рамках этой концепции зарождение канала молнии является аналогом формирования пространственного лидера в процессе развития ступеней отрицательного лидера. Круг поисков механизма инициации молнии фактически замкнулся: научное сообщество, занимающееся грозовым электричеством, вернулось к уже отвергнутой идее традиционного пробоя, развивающегося в виде положительной стримерной системы, растущей с поверхности гидрометеора.

Однако недавно был предложен принципиально новый механизм инициации молнии, основанный на индуцированном шумом кинетическом переходе, происходящем в стохастическом поле заряженных гидрометеоров [8]. Источником шума является стохастическое поле заряженных гидрометеоров – частичек, состоящих из жидкой или замороженной воды (капли, снежинки, крупа, кристаллики льда и т. д.), взвешенных в турбулентном конвективном потоке. Предложенный сценарий инициации молнии выглядит как последовательность переходов разрядной активности с малых пространственных масштабов на более протяжённые. Первая стадия сценария представляет собой переход от мелкомасштабных таунсендовских лавин к мезомасштабным стримерам; вторая стадия – переход от стримерных разрядов к крупномасштабной системе горячих лидерных каналов. Одним из основных моментов предлагаемого сценария является то, что генерация стримеров определяется уровнем мелкомасштабных и мезомасштабных флуктуаций электрического поля в грозовом облаке и практически не зависит от величины крупномасштабного поля. В свою очередь, роль крупномасштабного электрического поля заключается в обеспечении взаимодействия возникающих стримеров, когда последние начинают развиваться главным образом в направлении внешнего поля.

Эстафетный механизм производства ионов

Структура электрического поля грозового облака сложна и неоднородна из-за турбулентного движения воздушных масс и наличия гидрометеоров. Основными резервуарами электрической энергии в грозовом облаке являются: 1) крупномасштабное поле основных заряженных слоев, которые образуются из-за разделения противоположно заряженных гидрометеоров на масштабах порядка сотен метров – километров, 2) мезомасштабное поле заряженных гидрометеоров, движущихся в турбулентном воздушном потоке и 3) мелкомасштабное поле приобретённых и поляризационных зарядов на поверхностях отдельных твердых и жидких частиц воды. Три пространственных масштаба запасенной энергии могут быть связаны с тремя каналами ее диссипации (три типа разрядной активности): электронные лавины на мелком масштабе (0,1–1 см), стримеры на мезомасштабном уровне (0,1–1 м) и лидеры на крупных масштабах (10–10⁴ м). Однако из многочисленных данных измерений *in situ* известно, что амплитуда крупномасштабного электрического поля в грозовом облаке на порядок меньше порогового значения, необходимого для электрического пробоя воздуха. Поэтому именно поиск механизмов локального (мезомасштабного) усиления относительно слабых крупномасштабных грозовых полей до уровня инициации и развития стримеров составляет основную интригу процесса зарождения молнии.

Коллективная динамика заряженных гидрометеоров, участвующих в турбулентном движении, играет фундаментальную роль в возникновении молниевых разрядов. Идея рассмотрения коллективных эффектов в плазмоподобной облачной среде – ансамбле заряженных гидрометеоров – была впервые предложена В.Ю. Трахтенгерцем [21], который разработал простую бидисперсную модель пучковой неустойчивости, приводящей к стратификации облачной среды и возникновению электрического разряда. В последующих исследованиях [14, 22] было показано, что в типичных условиях грозового облака коллективные моды пространственного заряда могут формироваться и становиться нестабильными для длин волн от 10 до 100 м. Совсем недавно в работе [8] было установлено, что даже статистически однородное распределение заряженных гидрометеоров вызывает сильные мезомасштабные (0,1–1 м) флуктуации электрического поля. Было также показано, что уровень мезомасштабных флуктуаций электрического поля может быть значительно увеличен за счет эффектов кластеризации гидрометеоров в турбулентном потоке грозового облака (см., например, [11, 12, 3]). Недавно в работе [3] был представлен аэродинамический механизм генерации мезомасштабных флуктуаций

электрического поля в условиях турбулентного перемешивания бидисперсной суспензии противоположно заряженных частиц. Было показано, что турбулентность преимущественно концентрирует мелкие частицы в областях между вихрями, в то время как более крупные противоположно заряженные частицы в силу большей инерции распределены в пространстве более равномерно. При этом возникают возмущения квазиэлектростатического поля с характерным масштабом, существенно превышающим среднее расстояние между частицами и наименьший размер турбулентных вихрей. Хотя эти обусловленные турбулентностью электрические поля имеют небольшие амплитуды по сравнению с полем пробоя атмосферного воздуха, они обеспечивают сильную поляризацию сталкивающихся (сближающихся) гидрометеоров из-за их высокой диэлектрической проницаемости и способствуют возникновению мелкомасштабных разрядов.

Недавно был предложен принципиально новый механизм инициации стримеров в грозовом облаке, основанный на фундаментальной роли мезомасштабных (0,1 – 1 м) флуктуаций электрического поля [8]. Предложенный сценарий инициации молнии выглядит как последовательность переходов разрядной активности с малых пространственных масштабов на более протяжённые. Первая стадия сценария представляет собой переход от мелкомасштабных таунсендовских лавин к мезомасштабным стримерам; вторая – переход от стримерных разрядов к крупномасштабной системе горячих лидерных каналов.

Надкритические всплески поля, при которых становится возможной генерация пар электронов и положительных ионов, происходят на коротких интервалах времени в сильно локализованных областях пространства. Они связаны с соударениями или сближениями гидрометеоров, между которыми возникают коронные разряды. Данные всплески поля с масштабами порядка нескольких миллиметров (размеры крупных гидрометеоров) и временами жизни порядка 0,1–1 мс (время, за которое гидрометеор пролетает расстояние порядка своего размера) можно назвать центрами ионизации.

Возникающие в результате коронных разрядов электроны быстро прилипают к нейтралам, после чего положительные и отрицательные ионы разделяются за счет дрейфа во внешнем электрическом поле E_a , что уменьшает рекомбинационные потери. Так формируются диполеподобные области остаточной ионной концентрации с масштабами, временами жизни и проводимостями порядка 0,1–1 м, 1–10 с и 10^{-13} – 10^{-12} См/м соответственно (см. [9, таблица 1]). Время жизни ионных пятен τ определяется потерями ионов на гидрометеорах, а масштаб L может быть оценен как $\sqrt{\mathcal{D}\tau}$, где \mathcal{D} – коэффициент адвективной диффузии ионов. Физически адвективная диффузия связана

со стохастическим дрейфом в сильно неоднородном мелкомасштабном поле \mathbf{E} , создаваемом крупными гидрометеорами с концентрацией N_h , а величина её коэффициента $\mathcal{D} \approx \langle (\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{V}_a)^2 \rangle^{1/2} \cdot N_h^{-1/3} \approx 1 \text{ м}^2\text{с}^{-1}$, где $\mathbf{V} = \mu\mathbf{E}$ и $\mathbf{V}_a = \mu\mathbf{E}_a$ – локальная и усредненная скорости дрейфа ионов с подвижностью $\mu \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ м} \cdot \text{В}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ [4], на много порядков превышает величину их молекулярного коэффициента диффузии, составляющего примерно $2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2\text{с}^{-1}$ [18].

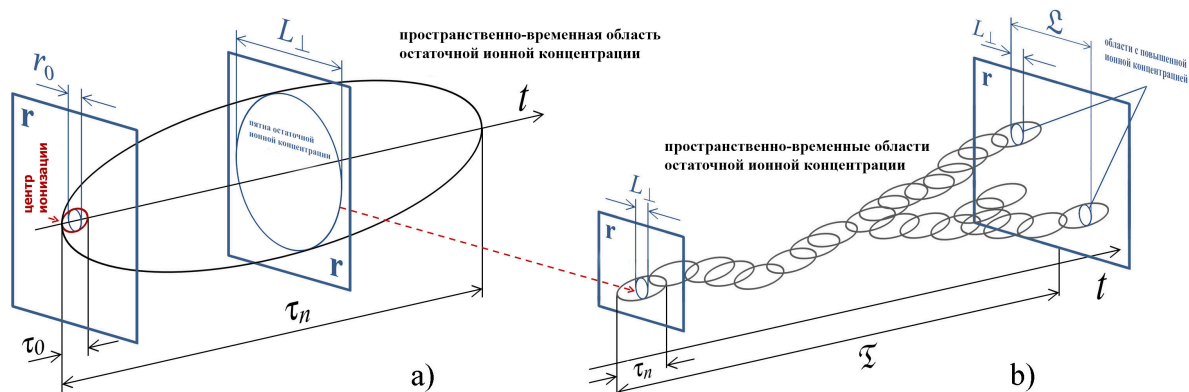


Рис. 1: Схематическое представление (а) формирования пятна остаточной ионной концентрации и (б) пространственного перекрытия данных пятен с образованием пространственно-временных областей повышенной ионной проводимости.

Ключевым моментом предлагаемого авторами работы [9] сценария является эстафетный процесс, приводящий к постепенному росту концентрации отрицательных ионов (см. рис. 1). Он заключается в том, что центр ионизации, возникающий внутри области повышенной концентрации отрицательных ионов, наработает большее количество пар электронов и положительных ионов, поскольку рост электронной компоненты будет начинаться не с низкого фонового, а с повышенного уровня, который обеспечивается отлипанием электронов от отрицательных ионов. Важно подчеркнуть, что отлипание становится существенным ещё в докритических полях вследствие увеличения трансляционной температуры ионов. За счёт своеобразной эстафеты каждое новое поколение центров ионизации, возникающих внутри пятна отрицательных ионов, за время жизни нарабатывает всё больше и больше ионных пар, что в конце концов приводит к формированию долгоживущих (1 – 10 с) областей с повышенной ионной концентрацией и размерами порядка дециметров. Можно аналитически показать, что максимальная достижимая концентрация отрицательных ионов составляет порядка 10^{20} м^{-3} [9], что по порядку величины совпадает с концентрацией электронов в области стримерной головки [2]. Соответствующий данной концентрации заряд, сосредоточенный в области с

размерами центра ионизации, будет на уровне $5 \cdot 10^{-7}$ Кл, что на много порядков больше максимально достижимого заряда крупных гидрометеоров, равного $2 \cdot 10^{-10}$ Кл [1]. Создаваемое таким квазиэлектродом поле будет достаточным для инициации и поддержания роста положительных стримеров на дециметровых–метровых масштабах.

Для того, чтобы описанный эстафетный механизм мог работать, пространственно-временная частота возникновения коронных разрядов \mathfrak{M} должна превышать определенный порог. Если вспышек поля будет слишком мало, то к моменту появления следующей короны от предыдущего ионного пятна ничего не остается. Зная четырехмерный пространственно-временной гиперобъем пятна $\mathfrak{S} = \frac{\pi^2}{2} L^3 \tau = \frac{\pi^2}{2} \mathfrak{D}^{3/2} \tau^{5/2}$ и критическое значение безразмерного фактора заполнения $\mathfrak{V} = \mathfrak{M} \mathfrak{S}$, который, как это следует из теории направленной перколяции, для 3D+1 случая равен 13% [20], можно получить критическое значение пространственно-временной частоты возникновения центров ионизации \mathfrak{M}_c на уровне $0,1 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$. Данное значение может быть достигнуто в грозовом облаке, поскольку десятки и даже сотни соударений гидрометеоров в кубическом метре за секунду наблюдались экспериментально [25, 7, 24, 6]. Даже если только каждое сотое соударение гидрометеоров приводит к появлению центра ионизации, этого уже будет достаточно для роста концентрации отрицательных ионов.

В работе [9] показано, что при выполнении условия $\mathfrak{M} \geq \mathfrak{M}_c$ описанный выше эстафетный механизм в конце концов приводит к тому, что грозовое облако заполняется областями повышенной ионной проводимости с примерно теми же размерами и временами жизни, что и области остаточной ионной концентрации, и с проводимостью σ порядка 10^{-10} – 10^{-9} См/м (на порядки величины выше, чем проводимость окружающей среды), при которой время Максвелловской релаксации поля ϵ_0/σ составляет 10^{-2} – 10^{-1} с. Последнее означает, что области повышенной ионной проводимости за время их жизни успевают поляризоваться, усиливая внешнее электрическое поле на своих полюсах по крайней мере втрое.

Очевидно, существует положительная обратная связь между увеличением пространственно-временной частоты появления центров ионизации, ростом всплесков концентрации положительных и отрицательных ионов и увеличением амплитуды флуктуаций электрического поля, которое приводит к дальнейшему росту пространственно-временной частоты коронирования гидрометеоров.

Стримеры и стримерно-лидерный переход в грозовом облаке

Как уже было отмечено, многие авторы гипотез инициации молнии в грозовом облаке явно или косвенно ограничиваются рассмотрением инициации единственного положительного стримера и не объясняют, как он избегает затухания и трансформируется в лидерный канал. Известно, что положительные стримеры могут распространяться в более слабых электрических полях по сравнению с отрицательными ($5 \cdot 10^5$ В/м против 10^6 В/м на уровне моря для положительных и отрицательных стримеров соответственно [2]). Поэтому в естественных условиях положительные стримеры всегда возникают раньше отрицательных. Для околоскритических полей скорость распространения стримера составляет порядка 10^5 м/с [2]. Свободные электроны быстро прилипают к кислороду воздуха и проводимость стримера остаётся значительной только на расстоянии порядка нескольких сантиметров за его головкой. В результате, такие стримеры не будут переносить большие количества заряда на значительные расстояния. Поскольку одиночный стример распространяется без заметного нагрева воздуха [18], сам факт появления стримеров, как уже отмечалось выше, вовсе не гарантирует формирования горячего лидерного канала.

Лабораторные лидеры появляются, когда система стримеров, испускаемых из небольшой области вблизи металлического электрода, имеет достаточно высокую совокупную плотность тока, необходимую для нагрева воздуха в этой области [2]. В грозовых облаках, не имеющих металлических электродов, неясно, каким образом на самом деле происходит так называемый стримерно-лидерный переход. Авторы обзора [5] констатируют: «In order to create and maintain a hot channel, the energy from the electrostatic field must be concentrated into a much smaller volume, where the heating occurs. This may happen via the creation of an extended streamer network, with many streamers feeding their current into a narrow channel (Чтобы создать и поддерживать горячий канал, энергия электростатического поля должна быть сконцентрирована в небольшом объёме облака, где и происходит нагрев. Это может достигаться за счёт создания обширной сети стримеров, собирающих заряды из большого объёма облака и питающих суммарным током тонкий канал)».

Итак, сами по себе холодные слабо проводящие стримерные каналы не способны привести к формированию лидера. Необходимо, чтобы в облаке сформировалась обширная сеть стримерных каналов, которая является несравненно более «живучей», чем одиночные стримеры или небольшие стримерные системы. Из общих соображений по-

нятно, что образование такой сети возможно лишь при наличии достаточно сильного внешнего поля. Если последнее будет близко к нулю, исчезнет его «направляющая» роль и слияние стримеров вдоль выделенного направления станет невозможным. Кроме того, необходимо, чтобы пространственно-временная частота возникновения стримеров превышала порог равный $0,1 \text{ м}^{-3}\text{с}^{-1}$. При этом нужно принимать во внимание, что характерный масштаб возникающих стримеров совпадает с масштабом флуктуаций электрического поля, который, в свою очередь, определяется масштабом ионных пятен, составляющим $0,1 - 1 \text{ м}$. Время жизни холодного стримерного канала, плазма которого быстро рекомбинирует, крайне мало. Однако характерное время, на котором сохраняется прогрев стримерного канала, оцененное как отношение квадрата радиуса стримерного канала ($\approx 10^{-5} \text{ м}^2$ при радиусе стримера порядка нескольких миллиметров [15]) к температурному коэффициенту диффузии ($\approx 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ [26]), составляет порядка секунды. Поэтому остающиеся после положительных стримеров области повышенного прогрева и преионизации имеют примерно такой же четырехмерный гиперобъем, как и пятна повышенной ионной проводимости. Большую роль в увеличении объема, занимаемого стримерными разрядами, играет ветвление стримеров. Так, известно, что стримеры начинают ветвиться уже на масштабах, всего на порядок превышающих их диаметр [15].

В [10] показано, что в грозовом облаке происходит формирование пространственно-временной сети стримерных разрядов, которая представляет собой иерархическую систему взаимодействующих каналов. Эволюция стримерной сети сильно зависит от величины внешнего крупномасштабного электрического поля. В случае слабого окружающего поля возникающие стримеры могут распространяться практически в любом направлении, а их длина редко превышает протяженность мезомасштабных ($0,1-1 \text{ м}$) флуктуаций электрического поля. Сегменты горячих каналов могут иногда появляться внутри стримерной сети, но их время жизни и длина ограничены (см. рис. 2а). По мере увеличения внешнего электрического поля его влияние на стримерную сеть становится более значительным, что облегчает взаимодействие стримеров и их кластеризацию (см. рис. 2б). При этом в сети появляются горячие сегменты (из-за так называемой ионизационно-перегревной неустойчивости [2]), которые поляризуются и растут вдоль внешнего поля, даже если его величина меньше порога распространения положительных стримеров. В недавнем эксперименте [13] была показана возможность формирования в искусственном облаке, состоящем из заряженных водяных капелек, так называемых необычных плазменных образований (unusual plasma formations, UPFs), по мнению

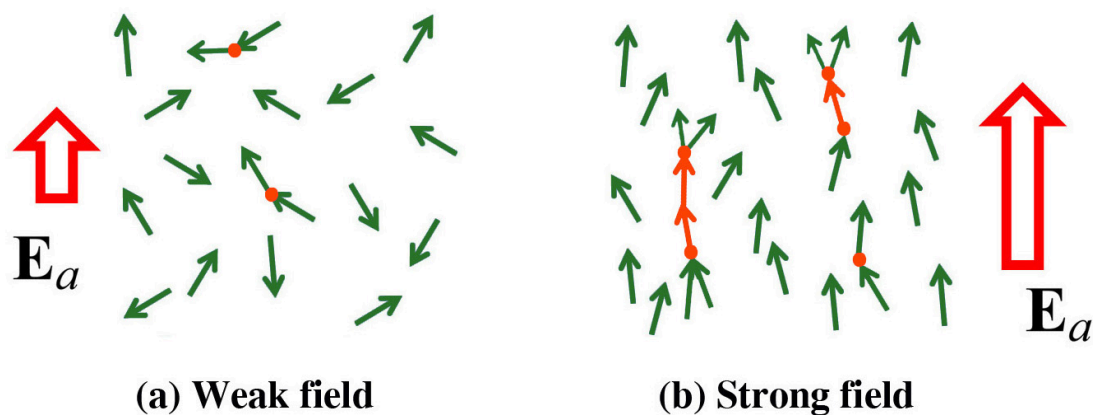


Рис. 2: Схематическое изображение формирования заполняющей объем стримерной сети в относительно слабом (а) и относительно сильном (б) окружающем электрическом поле E_a . Стримеры представлены зелеными стрелками, а встроенные горячие сегменты показаны маленькими оранжевыми кружками (точки соединения стримеров) и стрелками (термализованные стримеры). В (а) возникающие стримеры могут быть ориентированы практически в любом направлении, в то время как в (б) стримеры преимущественно ориентированы (и группируются) вдоль направления внешнего электрического поля.

авторов являющихся переходным звеном от стримеров к лидерам. Разумно предположить, что формирование “зародыша” (и, в конечном счёте, лидера молнии) молнии в грозовом облаке происходит подобно формированию UPFs, то есть посредством объединения стримерных систем в обширную сеть, внутри которой, в местах, через которые протекают наибольшие токи, формируются пространственные стемы, дающие начало растущим лидерным каналам.

Наличия сильного крупномасштабного поля может оказаться недостаточным условием для «вызревания» зародыша молнии внутри трёхмерной сети плазменных каналов, даже при наличии в ней хорошо проводящих сегментов. Необходимо выполнение ещё одного условия: связанная с этим внешним полем разность потенциалов должна превышать примерно 3 МВ. В частности в экспериментах с триггерной молнией [23] было обнаружено, что инициация устойчивого положительного лидера с конца заземлённого провода длиной 400 м происходила когда разность потенциалов, “закороченная” проводом, была 3,6 МВ. В более раннем исследовании [17], посвящённом изучению процесса инициации молнии с заземлённых объектов высотой h и незаземлённых объектов длиной L во внешнем поле E_a , было обнаружено, что необходимая для появления разряда “закороченная” разность потенциалов, вычисляемая как $E_a h$ и $E_a(L/2)$ для за-

землённых и незаземлённых объектов соответственно, должна составлять порядка 1 МВ. В частности, для космического корабля «Аполлон-12», эффективная длина которого (с учётом выхлопной струи горячих газов) в момент удара молнии в него была около 400 м, “закороченная” разность потенциалов во внешнем поле ≥ 10 кВ/м должна была составлять не менее 2 МВ. Таким образом, представляется удобным объединить критерии интенсивности поля и его пространственного масштаба в единый критерий “закороченной” разности потенциалов, как это сделано в [10].

Отличительной особенностью описанного выше сценария, выгодно отличающей его от предшествующих подходов, является его реализуемость в условиях типичного грозового облака. Действительно, пороговые значения пространственно-временной частоты столкновения гидрометеоров (и их коронирования) и “закороченной” разности потенциалов в поле грозового облака, равные $0,1 \text{ м}^{-3}\text{с}^{-1}$ и 3 МВ соответственно, являются вполне типичными. Следует особо отметить, что выше названные критерии базируются на экспериментальных данных, полученных в натуральных условиях, что является сравнительно редким в работах по инициации молнии. Предложенный в [9, 10] механизм представляет собой последовательность переходов разрядной активности с малых пространственных масштабов на более протяжённые, и это происходит в ходе естественной эволюции облака без привлечения в качестве спускового механизма внешних факторов, роль которых до сих пор является предметом дискуссии. Одним из основных моментов этого сценария является то, что генерация стримеров определяется уровнем мелкомасштабных и мезомасштабных флуктуаций электрического поля в грозовом облаке и практически не зависит от величины крупномасштабного поля. В свою очередь, роль крупномасштабного электрического поля заключается в обеспечении взаимодействия возникающих стримеров, когда последние начинают развиваться главным образом вдоль направления этого поля.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (Соглашение No. 19-17-00183).

Список литературы

- [1] Bateman M. G. et al. J. Geophys. Res., 104:9643–53, 1999.
- [2] J. M. Bazelyan and Y. P. Raizer. Spark Discharge. CRC Press, Boca Raton, New York, 1998.

- [3] DiRenzo M. and Urzay J. *Nat. Commun.*, 9(1676), 2018.
- [4] Dutton J. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, 4(3), 1975.
- [5] Dwyer J. R. and Uman M. A. *Phys. Rep.*, 534(4):147–241, 2014.
- [6] Dye J. E. et al. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 114(483):1271–1290, 1988.
- [7] Gardiner B. et al. *J. Geophys. Res. Atmos.*, 90(D4):6079–6086, 1985.
- [8] Iudin D. I. *Radiophys. Quantum Electron.*, 60(5):374–394, 2017.
- [9] Iudin D. I. et al. *NPJ Clim Atmos Sci.*, 2:46, 2019.
- [10] Iudin D. I. et al. *Sci. Rep.*, 11:18016, 2021.
- [11] Klyatskin V. I. *Phys. Usp.*, 37(5):501–513, 1994.
- [12] Klyatskin V. I. *Phys. Usp.*, 46(7):667–688, 2003.
- [13] Kostinskiy A. Yu. et al. *Geophys. Res. Lett.*, 42:8165–8171, 2015.
- [14] Mareev E. A. et al. *Plasma Phys. Rep.*, 25(3):261–272, 1999.
- [15] Nijdam S. et al. *Plasma Sources Sci. Technol.*, 29(10):103001, 2020.
- [16] Petersen D. et al. *J. Geophys. Res.*, 113(D17):D17205, 2008.
- [17] Pierce E. T. Triggered lightning and some unsuspected lightning hazards. *Nav. Res. Rev.*, Contract N00014-71-C-0106:14–28, 1972.
- [18] Y. P. Raizer. *Gas Discharge Physics*. Springer, New York, 1991.
- [19] V. A. Rakov and M. A. Uman. *Lightning: Physics and effects*. Cambridge University Press, New York, 2005.
- [20] Torquato S. and Jiao Y. *J. Chem. Phys.*, 137(7):074106, 2012.
- [21] Trakhtengerts V. Yu. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 308(584), 1989.
- [22] V. Yu. Trakhtengerts and D. I. Iudin. *Sprites, Elves and Intense Lightning Discharges*, Vol. 225. Springer, Netherlands, 2006.
- [23] Willett J. C. et al. *Atmos. Res.*, 51:189–219, 1999.
- [24] Ziegler C. L. and MacGorman D. R. *J. Atmos. Sci.*, 51:833–851, 1994.

[25] Ziegler C. L. et al. J. Geophys. Res., 96(D7):12.833–12.855, 1991.

[26] Н. Б. Варгафтик. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей.
Наука, 1972.